



Probabilidades e Estatística 2004/05

Colectânea de Exercícios

LEIC, LERCI, LEE

Capítulo 5

Distribuições conjuntas de probabilidades e complementos

Exercício 5.1 (a) $P(X = x) = \begin{cases} 0.2 & x = 0 \\ 0.65 & x = 1 \\ 0.15 & x = 2 \\ 0 & c.c. \end{cases}$ e $P(Y = y) = \begin{cases} 0.5 & y = 0 \\ 0.36 & y = 1 \\ 0.14 & y = 2 \\ 0 & c.c. \end{cases}$.

(b) $F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0.2 & 0 \leq x < 1 \\ 0.85 & 1 \leq x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$.

(c) $P(Y > X) = 0.18$.

(d) $E[X + Y] = 1.59$, $\text{Var}[X + Y] = 0.8619$.

Exercício 5.2 Represente-se por e (n) o resultado de num lançamento da linha de lançamento livre o jogador encestar (não encestar) no cesto.

- (a) O espaço de resultado associado aos três lançamentos da linha de lançamento livre efectuados pelo jogador pode ser

$$\Omega = \{abc : a, b, c \in \{e, n\}\}$$

sendo que o caso abc denota a situação em que os resultados do primeiro, segundo e terceiro lançamentos da linha de lançamento livre são a , b e c , respectivamente.

Para determinar as probabilidades dos acontecimentos elementares, é conveniente definir os acontecimentos

$$A_i = \{\text{o jogador encesta da linha de lançamento livre no } i\text{-ésimo lançamento}\}$$

para $i = 1, 2, 3$. Do enunciado sabe-se que os acontecimentos A_i são independentes e $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = 0.6$. Deste modo,

$$P(\{eee\}) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) = 0.6^3 = 0.216$$

e, procedendo de modo análogo para os restantes acontecimentos elementares,

$$\begin{aligned} P(\{eee\}) &= 0.216 & P(\{een\}) &= P(\{ene\}) = P(\{nee\}) = 0.144 \\ P(\{nnn\}) &= 0.064 & P(\{enn\}) &= P(\{nen\}) = P(\{nne\}) = 0.096. \end{aligned}$$

(b)

$Y \backslash X$	0	1	2	$P(Y = y)$
i) 0	0.064	0.096	0	0.16
1	0.096	0.240	0.144	0.48
2	0	0.144	0.216	0.36
$P(X = x)$	0.16	0.48	0.36	1

$$\text{ii) } P(X = x) = P(Y = x) = \begin{cases} 0.16 & x = 0 \\ 0.48 & x = 1 \\ 0.36 & x = 2 \\ 0 & c.c. \end{cases}.$$

Exercício 5.3

$$\text{(a) i) } P(X = x) = \begin{cases} 2/9 & x = 1 \\ 1/2 & x = 2 \\ 5/18 & x = 3 \\ 0 & c.c. \end{cases}.$$

$$\text{ii) } F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 1 \\ 1/6 & 1 \leq y < 2 \\ 11/18 & 2 \leq y < 3 \\ 1 & y \geq 3 \end{cases}.$$

$$\text{iii) } P(X + Y \leq 4) = 11/18.$$

$$\text{iv) } P(X = x|Y = 1) = \begin{cases} 2/3 & x = 1 \\ 1/3 & x = 3 \\ 0 & c.c. \end{cases} \quad \text{e} \quad P(X = x|Y = 3) = \begin{cases} 2/7 & x = 1 \\ 3/7 & x = 2 \\ 2/7 & x = 3 \\ 0 & c.c. \end{cases}.$$

v) $E[X|Y = 1] = 5/3$.

(b) $E[X|Y]$ assume valores no conjunto $\{5/3, 9/4, 2\}$ e possui função de probabilidade

$$P(E[X|Y] = z) = \begin{cases} 0.16 & z = \frac{5}{3} \\ 0.48 & z = \frac{9}{4} \\ 0.36 & z = 2 \\ 0 & c.c. \end{cases}.$$

(c) i) $Var[X|Y = 1] = 8/9$.

ii) $P(X.Y \text{ ser par}) = 11/18$.

iii) $P(Y = 2|X.Y \leq 4) = 6/11$.

iv) $F_{Y|X=3}(y) = \begin{cases} 0 & y < 1 \\ 1/5 & 1 \leq y < 2 \\ 3/5 & 2 \leq y < 3 \\ 1 & y \geq 3 \end{cases}.$

(d) Não são independentes pois, por exemplo, $P(X = 1, Y = 2) \neq P(X = 1)P(Y = 2)$.

Exercício 5.4

(a) i)

$X \backslash Y$	0	1	2	3	4	$P(X = x)$
0	0.04	0	0.3	0	0.06	0.4
1	0	0.22	0	0.28	0	0.5
2	0	0	0.1	0	0	0.1
$P(Y = y)$	0.04	0.22	0.4	0.28	0.06	1

ii) $P(X = x) = \begin{cases} 0.4 & x = 0 \\ 0.5 & x = 1 \\ 0.1 & x = 2 \\ 0 & c.c. \end{cases}$ e $P(Y = y) = \begin{cases} 0.04 & y = 0 \\ 0.22 & y = 1 \\ 0.4 & y = 2 \\ 0.28 & y = 3 \\ 0.06 & y = 4 \\ 0 & c.c. \end{cases}.$

iii) $F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0.4 & 0 \leq x < 1 \\ 0.9 & 1 \leq x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}.$

iv) $P(X = x|Y = 2) = \begin{cases} 0.75 & x = 0 \\ 0.25 & x = 2 \\ 0 & c.c. \end{cases}.$

v) Não são independentes pois, por exemplo, $P(X = 0, Y = 1) \neq P(X = 0)P(Y = 1)$.

$$(b) \quad i) \quad P(Y = y|X = 0) = \begin{cases} 0.1 & y = 0 \\ 0.75 & y = 2 \\ 0.15 & y = 4 \\ 0 & c.c. \end{cases}, \quad P(Y = y|X = 1) = \begin{cases} 0.44 & y = 1 \\ 0.56 & y = 3 \\ 0 & c.c. \end{cases}$$

$$e \quad P(Y = y|X = 2) = \begin{cases} 1 & y = 2 \\ 0 & c.c. \end{cases}.$$

$$ii) \quad E[Y|X = 2] = 2, \quad \text{Var}[Y|X = 2] = 0.$$

$$iii) \quad F_{Y|X=0}(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ 0.1 & 0 \leq y < 2 \\ 0.85 & 2 \leq y < 4 \\ 1 & y \geq 4 \end{cases}.$$

$$iv) \quad P(Y = 2|X.Y = 0) = 0.75.$$

$$v) \quad P(X + Y \text{ ser ímpar}) = 0.$$

Exercício 5.5

(a) $\text{Corr}(X, Y) = 0.5$ pelo que X e Y não são variáveis aleatórias independentes.

$$(b) \quad E[X|Y = 3] = 3.5.$$

Exercício 5.6 $P(X = 0, Y = 0) \neq P(X = 0)P(Y = 0)$. Logo X e Y não são independentes.

Exercício 5.7

$$(a) \quad \text{Var}[X + Y] = 2pq.$$

$$(b) \quad E[X|Y] = q \text{ com probabilidade } 1.$$

$$(c) \quad P(U = u, V = v) = \begin{cases} p & u = v = 0 \\ q & u = v = 1 \\ 0 & c.c. \end{cases}.$$

Exercício 5.8 Seja Z a v.a. que designa o diâmetro exterior do tubo. Dado que $Z = X + 2Y$ e que X e Y são v.a. independentes e com distribuição normal, vem que

$$Z \sim \text{Normal}(E[X] + 2E[Y], \text{Var}[X] + 2^2\text{Var}[Y]) = \text{Normal}(3.6, 0.0224^2).$$

$$(a) \quad \mu_Z = 3.6 \text{ e } \sigma_Z = 0.0224.$$

$$(b) \quad P(Z > 3.62) = 1 - \Phi\left(\frac{3.62-3.6}{0.0224}\right) = 0.1860.$$

Exercício 5.9 Seja Y a variável aleatória que designa o peso (Kg) de 20 pessoas, e X_i o peso (Kg) da i -ésima pessoa, pelo que $Y = \sum_{i=1}^{20} X_i$.

- (a) Como $\{X_i, 1 \leq i \leq 20\} \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{Normal}(61, 10^2)$, tem-se $Y \sim \text{Normal}(20 \times 61, 20 \times 10^2)$ e logo

$$P(Y > 1300) = 1 - \Phi\left(\frac{1300 - 20 \times 61}{10\sqrt{20}}\right) = 0.0368.$$

- (b) Seja Z o peso total de 5 pessoas. Então, pelos mesmos motivos que anteriormente, vem que $Z \sim \text{Normal}(5 \times 61, 5 \times 10^2)$, pelo que

$$P(Z > 350) = 1 - \Phi\left(\frac{350 - 305}{10\sqrt{5}}\right) = 0.0221.$$

- (c) Seja N_1 o número de pessoas, de entre 20, com peso superior a 85 Kg. Então assumindo que os pesos das pessoas são independentes entre si, vem que $N_1 \sim \text{Binomial}(20, P(X > 85))$, pelo que $P(N_1 \leq 2) = 0.9994$.

Da mesma forma, se N_2 designar o número de pessoas com peso inferior a 40 Kg, de entre 20, vem que $N_2 \sim \text{Binomial}(20, P(X < 40))$, pelo que $P(N_2 \geq 1) = 0.3027$.

- (d) Sim, porque a probabilidade de se verificar que peso de 20 pessoas excede a carga máxima é pequena. Além disso, em face de (c), a probabilidade de haver mais que duas pessoas muito pesadas é muito pequena.

Exercício 5.10 Seja Z a variável aleatória que designa o consumo da fábrica e dos 100 consumidores domésticos, X_i (Y_i) o consumo em electrodomésticos (iluminação) do i -ésimo consumidor doméstico, $i = 1, 2, \dots, 100$. Como $\{(X_i, Y_i), i = 1, 2, \dots, 100\} \stackrel{\text{iid}}{\sim} (X, Y)$, com X e Y variáveis aleatórias independentes com $X \sim \text{Normal}(2, 0.5^2)$ e $Y \sim \text{Normal}(0.5, 0.25^2)$, vem que

$$Z = 2500 + \sum_{i=1}^{100} (X_i + Y_i) \sim \text{Normal}(2500 + 100(2 + 0.5), 100(0.5^2 + 0.25^2)).$$

A probabilidade pretendida é $P(Z > 2800) = 1 - \Phi\left(\frac{2800 - 2750}{10\sqrt{0.5^2 + 0.25^2}}\right) \approx 0$.

Exercício 5.11 Seja $X \sim \text{Exponencial}(0.5)$ a variável aleatória que representa o tempo (h) de produção de uma peça de porcelana.

- (a) $P(X \geq 1.75) = e^{-0.875} \approx 0.4169$.
- (b) $P(X \geq 1.75 + 0.75 | X > 0.75) = P(X \geq 1.75) = e^{-0.875}$, o que constitui uma instância da propriedade de falta de memória da distribuição exponencial.
- (c) Se os tempos de produção de diferentes peças de porcelana forem independentes, então o processo de contagem das peças de porcelana produzidas é um processo de Poisson de taxa 0.5/h. Seja N a variável aleatória que representa o número de peças produzidas em 240. Assumindo que as peças são independentes entre si, vem que $N \sim \text{Poisson}(120)$ e a probabilidade pretendida é igual a

$$P(N \geq 100) = 1 - P(N \leq 99) \approx 1 - \Phi\left(\frac{99 + 0.5 - 120}{\sqrt{120}}\right) = 0.9694$$

pelo que a probabilidade de a empresa cumprir o contrato é elevada.

- (d) Seja N o número de peças, de entre 6, que são executadas no máximo em 1h 45m. Então $N \sim \text{Binomial}(6, P(X \leq 1.75))$, pelo que $P(N = 4) = 0.3014$.

Exercício 5.12 Seja X_i a quantia em euros amealhada pelo estudante no i -ésimo dia do ano, $i = 1, 2, \dots, 365$, e $Y = \sum_{i=1}^{365} X_i$ o valor total em euros amealhado no ano. Supondo que as quantias amealhadas nos diferentes dias do ano são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas a X , com valor esperado $\mu_X = 0.5$ e desvio-padrão $\sigma_X = 0.2739$, tem-se, pelo teorema do limite central (sem considerar correcção de continuidade; note-se que neste caso a v.a., embora sendo discreta, não toma valores igualmente espaçados, pelo que a correcção de continuidade não se aplica nesta situação, pelo menos da forma como foi dada)

$$P(Y > 175) = 1 - P\left(\frac{Y - 182.5}{5.23} \leq \frac{175 - 182.5}{5.23}\right) \approx 1 - \Phi\left(\frac{175 - 182.5}{5.23}\right) = 0.9242.$$

Exercício 5.13 Seja $X \sim \text{Uniforme}(7, 12)$ o tempo (h) que o João Pestana dorme por noite, de modo que $\mu_X = 9.5$ e $\sigma_X = 5/\sqrt{12}$.

- (a) $P(X > 11) = 1/5 = 0.20$.
- (b) Seja N o número de noites, de entre 20, em que o João Pestana dorme mais de 11 horas. Assumindo que os tempos que o João Pestana dorme em diferentes noites são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas a X , vem que $N \sim \text{Binomial}(20, 0.20)$, pelo que a probabilidade pretendida é $P(N \geq 3) = 0.7939$.
- (c) Seja X_i o número de horas que o João Pestana dorme na i -ésima noite, $i = 1, 2, \dots, 100$ e $Y = \sum_{n=1}^{100} X_i$ o número total de horas que o João Pestana dorme nas 100 noites. Pelo teorema do limite central,

$$P(Y > 1100) = 1 - P\left(\frac{Y - 950}{50/\sqrt{12}} \leq \frac{1100 - 950}{50/\sqrt{12}}\right) \approx 1 - \Phi\left(\frac{1100 - 950}{50/\sqrt{12}}\right) \approx 0.$$